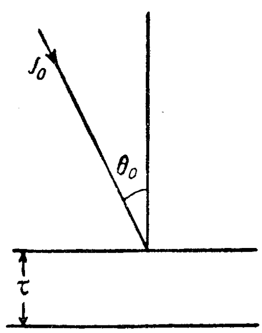
# ОБ ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ О РАССЕИВАЮЩЕЙ И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ КОНЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ*

Во многих вопросах теоретической астрофизики возникает задача о рассеянии света в среде, обладающей конечной оптической толщиной. В частности эта задача встает в теории образования линий поглощения звездными атмосферами, в теории рассеяния света планетными атмосферами и т. д.

При этом среда должна рассматриваться как обладающая способностью не только рассеяния, но и поглощения.

В трехмерном случае задача эта ставится следующим образом: имеется среда, состоящая из плоскопараллельных слоев, оптической толщины $\tau$. Задано для этой среды отношение коэффициента рассеяния к сумме коэффициентов рассеяния и поглощения. На одну из граней среды падает излучение интенсивности $J_0$ под углом $\theta_0$ с нормалью. Каковы будут интенсивность и распределение по направлениям рассеянного, диффузно-отраженного света и каковы будут интенсивность и распределение по направлениям диффузно-пропущенного средой света? Индикатриса рассеяния среды предполагается заданной.



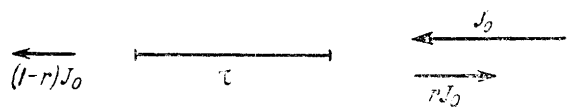

Изложенная задача приводит к некоторому интегральному уравнению, решение которого представляет значительную трудность.

В связи с этим представляет интерес рассмотреть сначала более простую *одномерную* задачу о рассеянии. Оказывается, что и эта задача приводит к интегральному уравнению с конечной областью интегрирования. Ядром уравнения в этом случае служит ядро Лалеско $\frac{1}{2} e^{-|\tau-t|}$.

* „Изв. АН АрмССР", естеств. науки, № 1—2, 1944.

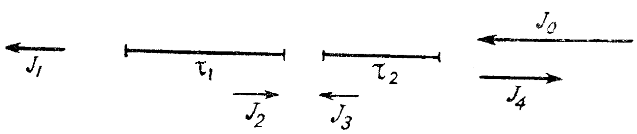
Однако можно показать, что как одномерная, так и трехмерная задача могут быть решены путем сведения их к некоторым функциональным уравнениям. При этом имеется то преимущество, что в качестве неизвестных в эти уравнения входят только величины, характеризующие положение на обоих границах среды (напр. интенсивности излучения), т. е. как раз искомые величины. Между тем в методе интегральных уравнений в качестве неизвестных фигурируют функции, характеризующие положение дел в каждой точке внутри среды. Кроме того, сам метод функциональных уравнений гораздо проще и быстрее приводит к цели.

*а) Основные уравнения.* Пусть имеем одномерную среду с оптической толщиной $\tau$. Тогда эта среда отражает некоторую долю падающей на нее интенсивности $J_0$, именно $rJ_0$, и пропускает некоторую долю $qJ_0$. В случае, когда в среде нет поглощения, а происходит лишь чистое рассеяние, очевидно $q=1-r$. При этом величина $r$ зависит от оптической толщины $\tau$. Положение дел в этом случае представлено на чертеже.




Рассмотрим два „слоя“ с оптическими толщинами $\tau_1$ и $\tau_2$, расположенных один за другим, так что в совокупности они образуют один слой оптической толщины $\tau_1+\tau_2$.

Обозначим интенсивность на границах, а также на стыке сред так, как это показано на следующей схеме.




Мы имеем, с одной стороны,

$$J_1 = q(\tau_1+\tau_2)\,J_0. \tag{1}$$

С другой стороны, мы можем написать по определению величин $q$ и $r$:

$$J_3 = q(\tau_2)\,J_0 + r(\tau_2)\,J_2$$
$$J_2 = r(\tau_1)\,J_3$$
$$J_1 = q(\tau_1)\,J_3.$$

Из последних трех равенств имеем:

$$J_1 = \frac{q(\tau_1)\, q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1)\, r(\tau_2)} J_0.$$

Сопоставляя с (1), получаем:

$$q(\tau_1 + \tau_2) = \frac{q(\tau_1)\, q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1)\, r(\tau_2)}. \tag{2}$$

Что касается $J_4$, то мы имеем:

$$J_4 = q(\tau_2)\, J_2 + r(\tau_2)\, J_0$$

или, поскольку

$$J_4 = r(\tau_1 + \tau_2)\, J_0,$$

то, исключая $J_2$, получаем:

$$r(\tau_1 + \tau_2) = r(\tau_2) + \frac{q(\tau_2)^2\, r(\tau_1)}{1 - r(\tau_1)\, r(\tau_2)}. \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) представляют собою систему двух функциональных уравнений для двух неизвестных функций $q(\tau)$ и $r(\tau)$.

*б) Чистое рассеяние.* Найдем сперва частное решение этой системы для случая чистого рассеяния:

$$r(\tau) = 1 - q(\tau). \tag{4}$$

Подставляя это условие в (2), получаем для $q(\tau)$ одно функциональное уравнение

$$q(\tau_1 + \tau_2) = \frac{q(\tau_1)\, q(\tau_2)}{q(\tau_1) + q(\tau_2) - q(\tau_1)\, q(\tau_2)}, \tag{5}$$

откуда следует

$$\frac{1}{q(\tau_1 + \tau_2)} = \frac{1}{q(\tau_1)} + \frac{1}{q(\tau_2)} - 1$$

или, если вычтем единицу из обоих частей равенства:

$$\frac{1}{q(\tau_1 + \tau_2)} - 1 = \frac{1}{q(\tau_1)} - 1 + \frac{1}{q(\tau_2)} - 1.$$

Отсюда видно, что функция

$$\frac{1}{q(\tau)} - 1$$

должна быть линейной однородной функцией от $\tau$. Обозначим ее через $a\tau$.

$$\frac{1}{q(\tau)} - 1 = a\tau,$$

откуда

$$q(\tau)=\frac{1}{1+a\tau}. \tag{6}$$

Это и есть решение функционального уравнения (5).

Значение коэффициента $a$ определяется при этом по заданной индикатрисе рассеяния. Для нахождения $a$ уточним сперва понятие об индикатрисе рассеяния для одномерного случая.

Из проходящей интенсивности $J$ элемент оптической глубины $d\tau$ поглощает интенсивность $Jd\tau$. Из этого количества доля $(1-\lambda)\ Jd\tau$ подвергается истинному поглощению и больше не участвует в игре. Другая же доля $\lambda Jd\tau$ рассеивается элементом $d\tau$, т. е. излучается элементом $d\tau$ в обе стороны. При этом некоторая часть $x\lambda Jd\tau$ излучается в том же направлении, в котором шло само излучение $J$, а другая часть $(1-x)\ \lambda Jd\tau$ излучается в противоположном направлении.

Задание величины $x$ и означает задание „индикатрисы" рассеяния в одномерном случае.

При заданной индикатрисе $x$ постоянная $a$ формулы (6) должна быть одной и той же для всех $\tau$, в том числе при малой оптической толщине слоя, когда (6) сводится к

$$q(\tau)=1-a\tau. \tag{7}$$

С другой стороны, очевидно, что интенсивность прошедшего через слой малой оптической толщины $\tau$ излучения будет равна:

$$J=J_0(1-\tau)+\lambda xJ_0\tau,$$

откуда при $\lambda=1$

$$q=1-(1-x)\tau. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), получаем:

$$a=1-x, \tag{9}$$

т. е. $a$ определяет долю света, рассеиваемого обратно.

Итак, вообще,

$$q(\tau)=\frac{1}{1+(1-x)\tau}. \tag{10}$$

При $x=\frac{1}{2}$, т. е. при „равновероятном рассеянии" в обе стороны, что аналогично сферической индикатрисе в трехмерном случае:

$$q(\tau)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\tau}. \tag{11}$$

*в) Общий случай.* Перейдем теперь к общему случаю, когда наряду с рассеянием в среде имеется и поглощение, причем $\lambda$ постоянно.

При слое очень малой оптической толщины $d\tau$ мы имеем для коэффициента отражения:

$$r = \lambda (1 - x) \, d\tau, \tag{12}$$

а для коэффициента пропускания:

$$q = 1 - (1 - \lambda x) \, d\tau. \tag{13}$$

Воспользуемся выражениями (12) и (13) и, приняв в (2) и (3) $\tau_1$ очень малым и равным $d\tau$, напишем получающиеся равенства:

$$q(\tau + d\tau) = \frac{q(\tau)\{1 - (1 - \lambda x) \, d\tau\}}{1 - r(\tau) \lambda (1 - x) \, d\tau},$$

$$r(\tau + d\tau) = r(\tau) + \frac{q(\tau)^2 \lambda (1 - x) \, d\tau}{1 - r(\tau) \lambda (1 - x) \, d\tau}.$$

Пренебрегая членами, содержащими $d\tau^2$, находим:

$$\frac{dq(\tau)}{d\tau} = \lambda (1 - x) \, q(\tau) \, r(\tau) - (1 - \lambda x) \, q(\tau) \tag{14}$$

$$\frac{dr(\tau)}{d\tau} = \lambda (1 - x) \, q(\tau)^2. \tag{15}$$

Деля (14) на (15), имеем:

$$q dq = r dr - \frac{1 - \lambda x}{\lambda (1 - x)} dr,$$

откуда

$$q^2 - r^2 = C - \frac{2(1 - \lambda x)}{\lambda (1 - x)} r,$$

где $C$ — постоянная интегрирования. Но, при $q = 1$ (полное пропускание, что соответствует $\tau = 0$), отражение $r = 0$. Поэтому $C = 1$. Мы имеем:

$$1 + r^2 - q^2 - \frac{2(1 - \lambda x)}{\lambda (1 - x)} r = 0. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), находим:

$$\frac{dr}{1 + r^2 - \dfrac{2(1 - \lambda x)}{\lambda (1 - x)} r} = d\tau. \tag{17}$$

Обозначим корни уравнения

$$1 + r^2 - \frac{2(1-\lambda x)}{\lambda(1-x)} r = 0$$

через $r_0$ и $\frac{1}{r_0}$ и выберем $r_0 \leqslant 1$.

Тогда (16) перепишется в виде:

$$(r_0 - r)\left(\frac{1}{r_0} - r\right) = q^2, \tag{18}$$

а уравнение (17) после интегрирования даст

$$r = r_0 \frac{1 - \frac{C}{r_0^2} e^{-2k\tau}}{1 - Ce^{-2k\tau}},$$

где

$$k = \frac{\lambda}{2}(1-x)\frac{1-r_0^2}{r_0}, \tag{19}$$

а $C$ — постоянная интегрирования. Но при $\tau = 0$ должно быть $r = 0$. Поэтому $C = r_0^2$. Итак,

$$r = r_0 \frac{1 - e^{-2k\tau}}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau}}. \tag{20}$$

Подставляя это выражение в (16), находим для $q$:

$$q = \frac{(1 - r_0^2)\, e^{-k\tau}}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau}}. \tag{21}$$

Из формулы (20) видно, что $r_0$ есть значение коэффициента отражения при $\tau = 0$.

Формулы (20) и (21) представляют собою решение системы функциональных уравнений (2) и (3).

Академия наук АрмССР,
Астрономическая обсерватория
1943, ноябрь